exercice n° 1 : (5 points)

La température d'une tarte à la sortie du four est de 180°C.
L'évolution de la température de la tarte en fonction du temps est modélisée par la suite (T_n) définie par :

$$T_0 = 180 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad T_{n+1} = 0,84 \times T_n + 3,2$$

1. L'algorithme complet est donc :

VARIABLES :	N est un entier naturel
	T est un nombre réel
INITIALISATION :	Affecter à N la valeur 0
	Affecter à T la valeur 180
TRAITEMENT :	Tant que $T \geqslant 80$
	Affecter à T la valeur $0,84 \times T + 3,2$
	Affecter à N la valeur $N + 1$
	Fin Tant que
SORTIE :	Afficher N

2.

Valeur de N	0	1	2	3	4	5	6
Valeur de T	180	154,42	132,93	114,88	99,72	86,99	76,29
Condition $T \geqslant 80$	Vraie	Vraie	Vraie	Vraie	Vraie	Vraie	Faux

3. La valeur affichée en sortie par cet algorithme est $\boxed{N = 6}$. Au bout de 6 minutes au four, la température de la tarte sera strictement inférieure à 80 °C.

Partie B

1. Pour tout nombre entier naturel n, on définit la suite (V_n) par : $V_n = T_n - 20$.

   (a) Soit un nombre entier naturel n.
   $V_{n+1} = T_{n+1} - 20 = 0,84 \times T_n + 3,2 - 20 = 0,84 \times T_n - 16,8 = 0,84 \times (V_n + 20) - 16,8$
   Donc $V_{n+1} = 0,84 \times V_n + 0,84 \times 20 - 16,8 = 0,84 \times V_n$

   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad V_{n+1} = 0,84 \times V_n}$$

   Donc V est une suite géométrique de raison 0,84 et de premier terme $V_0 = 160$.

   (b)
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad V_n = V_0 \times q^n = 160 \times (0,84)^n}$$

   (c) Pour tout nombre entier naturel n, on a :
   $V_n = T_n - 20$ donc $T_n = V_n + 20 = 160 \times (0,84)^n + 20$.

   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad T_n = 160 \times (0,84)^n + 20}$$

2. Étudier la monotonie de la suite (T_n), c'est étudier le sens de variation de la suite. Donc on peut penser à étudier le signe de $T_{n+1} - T_n$ vu l'expression de T_n. **A faire comme en classe ! ! !**

3. $\lim\limits_{n \to +\infty} (0,84)^n = 0$ car en posant $v_n = (0,84)^n$, v est une suite géométrique de raison $q = 0,84$ avec $-1 < q < 1$.

   Donc la limite de la suite (T_n) est donc de 20 par somme et produit de limites.

   La température de la tarte sera toujours supérieur ou égale (jamais) à 20 °C. (Pensez à ce théorème démontrée en classe : Toute suite décroissante et convergente vers l est minorée par l (DS n°2)).

exercice n° 2 : (4 points) QCM

1. On considère la suite u définie par $u_n = \dfrac{3n+n^2}{n-1}$ avec $n \neq 0$ alors :

   c. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n+n^2}{n-n^3} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+\dfrac{3}{n}}{n(\dfrac{1}{n^2}-1)} = 0$ par quotient de limites ! ! !

2. Une suite (u_n) est convergente et majorée par 3. Alors nécessairement :

   a. Comme $u_n \leq 3$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq 3$

3.

   b. $u_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \ldots + \dfrac{1}{3^n} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1-(\dfrac{1}{3})^n}{1-\dfrac{1}{3}}$ (somme des termes d'une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ avec n termes).

   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} (\dfrac{1}{3})^n = 0$ car en posant $v_n = (\dfrac{1}{3})^n$, v est une suite géométrique de raison q avec $-1 < q < 1$.

   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1-0}{1-\dfrac{1}{3}} = \dfrac{1}{2}$

4. Si pour tout entier naturel n, $v_n \leq u_n \leq w_n$, avec $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 3$, alors :

   b. Comme $v_n \leq u_n \leq w_n$ et que la suite w converge alors la suite u est majorée donc la suite u n'a pas pour limite $+\infty$.
   Ou bien par l'absurde si la suite u a pour limite $+\infty$, comme $u_n \leq w_n$, alors la suite w a pour limite $+\infty$ ce qui est absurde puisque la suite w converge.

exercice n° 3 : (3 points)

Soit (S_n) la suite définie pour tout entier naturel n supérieur ou égale à 1 par : $S_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2}$

1. **Soit** $n \in \mathbb{N}^*$. Étudions le signe de $S_{n+1} - S_n$.

   $S_{n+1} - S_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{(n+1)^2} - (1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2})$ **(Somme télescopique)**

   On a donc : $S_{n+1} - S_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}$. Il est alors clair que $\boxed{S_{n+1} - S_n > 0}$.

   Conclusion la suite (S_n) est croissante.

2. Montrer par **récurrence** que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n \leqslant 2 - \dfrac{1}{n}$

   Par récurrence : Exercice fait en classe ! ! ! L'hérédité consiste à vérifier que :

   $$2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n+1}$$

3. La suite (S_n) est croissante et majorée par 2 donc d'apres le théorème de convergence monotone, la suite S converge vers un reél L avec $L \leqslant 2$.

exercice n° 4 : (5 points)

1. $u_2 = \dfrac{2u_1-1}{u_1} = \dfrac{2\times 2-1}{2} = \boxed{\dfrac{3}{2}}$ $u_3 = \dfrac{2u_2-1}{u_2} = \dfrac{2\times\frac{3}{2}-1}{\frac{3}{2}} = \boxed{\dfrac{4}{3}}$ $u_4 = \dfrac{2u_3-1}{u_3} = \dfrac{2\times\frac{4}{3}-1}{\frac{4}{3}} = \boxed{\dfrac{5}{4}}$
2. Il semble que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\boxed{u_n = \dfrac{n+1}{n}}$.
3. Montrons, par récurrence, que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{n+1}{n}$.

   Identification de la propriété $P(n)$: $u_n = \dfrac{n+1}{n}$.

   Initialisation : $P(1)$ vraie ? $u_1 = \dfrac{1+1}{1} = 2$?

   D'après l'énoncé, $u_1 = 2$ donc $P(1)$ est vraie.

   Hérédité : On suppose que $P(n)$ est vraie pour un certain entier naturel n fixé $(n \geq 1)$: **HR** $\boxed{u_n = \dfrac{n+1}{n}}$.

   Montrons que $P(n+1)$ est vraie : $u_{n+1} = \dfrac{n+1+1}{n=1} = \dfrac{n+2}{n+1}$?

   On a : $u_{n+1} = \dfrac{2u_n-1}{u_n} = \dfrac{2\times\frac{n+1}{n}-1}{\frac{n+1}{n}} = \dfrac{\frac{2\times(n+1)-n}{n}}{\frac{n+1}{n}} = \dfrac{\frac{n+2}{n}}{\frac{n+1}{n}} = \dfrac{n+2}{n+1}$. Donc $P(n+1)$ est vraie !!!

   Conclusion : pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{n+1}{n}$.

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{n} = 1$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1}$
5. $S_n = u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n = \dfrac{2}{1} \times \dfrac{3}{2} \times \dfrac{4}{3} \times \ldots \times \dfrac{n}{n-1} \times \dfrac{n+1}{n} = n+1$ par simplification des termes. On démontre cette conjecture par **récurrence !!!**

exercice n° 5 : (3 points)

Voir preuve faites en cours exigible au BAC !!!

exercice n° 6 : (2 points)

On teste pour les valeurs de n égale à 0, 1 et 2. On remarque que le reste est égale à 0.
On effectue une démonstration par récurrence avec comme hypothèse de récurrence :
« il existe $k_n \in \mathbb{Z}$ tel que $9^n - 1 = 8 \times k_n$ ».

1. • Initialisation : Pour $n = 0$, on a $9^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = 8 \times 0$ donc on obtient bien un nombre pair sous la forme $8 \times k_0$ avec $k_0 = 0$.
2. • Hérédité : on suppose la propriété vraie pour un entier n quelconque, donc $9^n - 1 = 8k_n$, $k_n \in \mathbb{Z}$.
   Au rang $n+1$: $9^{n+1} - 1 = 9 \times 9^n - 1 = 9 \times (8k_n + 1) - 1 = 9 \times 8 \times k_n + 9 - 1 = 9 \times 8 \times k_n + 8 = 8\,(9k_n + 1)$ qu'on peut écrire $8k_{n+1}$ en posant $k_{n+1} = 9k_n + 1$. Donc la propriété est héréditaire.
3. • **Conclusion :** D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier naturel n.